Глава 4. Функции.

Вычисление значений математических функций

Как вы знаете, любую математическую функцию можно разложить в ряд Тейлора.
Рассмотрим для примера функцию экспоненты

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Т.е. $a_i = x^i/i!$. Учтите, что значение a_i не нужно вычислять каждый раз. Необходимо выразить значение $(i+1)$-го члена последовательности через i-й:

$$a_{i+1} = \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{x * x^i}{i! * (i+1)} = a_i \frac{x}{i+1}$$

Теперь напишем функцию, вычисляющую значение с заданной точностью *eps*:

```
double f(double x,double eps)
{
     double s=0;// Тут копим сумму
     double ai=1.; // Тут храним i-ый член ряда
     int i=0; // начальное значение i=0
     while(fabs(ai)>eps)
// Суммировать будем пока член ряда an не станет достаточно маленьким
     {
           s+=ai; // суммируем очередной член ряда
           ai*=x/(i+1); // пересчитываем a(i+1) через a(i)
           i++; // переходим к следующему члену
     }
     return s; // получившаяся сумма
}
```

Программа для тестирования этой функции будет выглядеть так:

```
int main()
{
    system("chcp 1251 > NUL");
    double xb,xe,step,eps;
    printf("x начальное=");
    scanf("%lf",&xb);
    printf("x конечное=");
    scanf("%lf",&xe);
    printf("шаг=");
    scanf("%lf",&step);
    printf("точность=");
    scanf("%lf",&eps);
    getchar();
    for(double x=xb;x<xe+step/2.;x+=step)
          printf("%lf\t%lf\t%lf\n",x, f(x,eps), exp(x));
    getchar();
    return 0;
}
```

Т.е. в программе вводятся *x* начальное и *x* конечное, шаг, с которым нужно получать значения и точность вычисления *eps*. И далее в цикле печатаются значения *x*, получившейся функции и библиотечной функции.

Обратите внимание на условие `x<xe+step/2.` Нюанс в том, что если написать `x<=xe`, то последняя строка может и не напечататься. Причина в том, что двоичные числа с плавающей запятой дают приближенное значение при переводе в десятичную систему счисления. И, например, вместо 1.1 может получиться 1.0999999999999999.

Варианты задач для решения.

Напишите функцию `double f(double x,double eps)` вычисляющую значение библиотечной функции, заданной разложением в ряд Тейлора $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$. Суммирование завершайте по достижению условия $|a_n(x)| \le eps$. Для вычисления a_n воспользуйтесь рекуррентными соотношениями. Функция должна поверять значение *x* и выдавать сообщение об ошибке при задании *x* вне диапазона, разрешённого для используемого ряда.

Функцию поместить в отдельный файл (например, *lib.cpp*). Объявление функции поместить в заголовочный файл (например, *lib.h*). Программу тестирования этой функции поместить в другой файл (например, *task4.cpp*). В ней нужно организовать ввод параметра *eps*, интервал и шаг изменения аргумента *x* и печать таблицы значений аргумента, функции $f(x)$ и соответствующей библиотечной функции.

1. Вариант $f(x)=\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)$, $a_n=\frac{(-1)^n(x)^{2n}}{(2n)!}$
2. Вариант $f(x)=arctg(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)$, $a_n=\frac{(-1)^{n+1}x^{-2n-1}}{2n+1}$, $\|x\|>1$
3. Вариант $f(x)=(1-x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, $a_n=\frac{(-1)^n m(m-1)...(m-n+1)(x)^n}{(n)!}$, $\|x\|<1, m=1/2$
4. Вариант $f(x)=\operatorname{sinc}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)$, $a_n=\frac{(-1)^n(x)^{2n}}{(2n+1)!}$
5. Вариант $f(x)=arcch(x)=\ln(2x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1*3*5*...*(2n-1)(x)^{-2n}}{2*4*6*...*(2n)}$
6. Вариант $f(x)=arctg(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)$, $a_n=\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $\|x\|<1$
7. Вариант $f(x)=sh(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, $a_n=\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
8. Вариант $f(x)=\ln(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{nx^n}$, $x>0.5$
9. Вариант $f(x)=arcctg(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)$, $a_n=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$, $\|x\|>1$
10. Вариант $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}$
11. Вариант $f(x)=\sin(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$
12. Вариант $f(x)=arccth(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{-2n-1}}{2n+1}$, $\|x\|>1$

13. Вариант

$$f(x)=\ln(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}$$, x>0

14. Вариант

$$f(x)=\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x)^{n}}{n}$$, |x|<1

15. Вариант

$$f(x)=(1+x)^{m}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$$, $$a_n=\frac{m(m-1)...(m-n+1)(x)^n}{(n)!}$$, |x|<1,m=1/3

16. Вариант

$$f(x)=\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x)^{n}}{n}$$, |x|>1

17. Вариант

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{-2n-1}}{2n+1}$$, |x|>1

18. Вариант

$$f(x)=\arcsin(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1*3*5*...*(2n-1)(x)^{2n+1}}{2*4*6*...*(2n)*(2n+1)}$$

19. Вариант

$$f(x)=\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1*3*5*...*(2n-1)(x)^{2n+1}}{2*4*6*...*(2n)*(2n+1)}$$

20. Вариант

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{2n+1}}{2n+1}$$, |x|<1

21. Вариант

$$f(x)=(1-x)^{-m}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$$, $$a_n=\frac{m(m+1)...(m+n-1)(x)^n}{(n)!}$$, |x|<1, m=1/4

22. Вариант

$$f(x)=arcsh(x)=x+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1*3*5*...*(2n-1)(x)^{2n+1}}{2*4*6*...*(2n)*(2n+1)}$$

23. Вариант

$$f(x)=arcth(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{2n+1}}{2n+1}$$, |x|<1

24. Вариант

$$f(x)=ch(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)$$, $$a_n=\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

25. Вариант

$$f(x)=x\cos(3x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}3^{2n}(x)^{2n+1}}{(2n)!}$$

26. Вариант $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{n}$
27. Вариант $f(x) = 0.5\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$, $a_n = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
28. Вариант $f(x) = 0.25\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 0.5 * arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$, $a_n = \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$
29. Вариант $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$, $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$
30. Вариант $f(x) = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{n-1}}{(2n)!}$

Вычисление определенных интегралов

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ можно использовать один из следующих численных методов, различающихся по своей точности, достигаемой при одинаковых затратах вычислительных ресурсов.

Методы нижних, верхних и средних прямоугольников

Будем рассматривать определенный интеграл как площадь под графиком подынтегральной функции. Разобьем весь интервал интегрирования на **N** отрезков одинаковой длины. Тогда аппроксимацией для площади под графиком функции может служить сумма площадей прямоугольников, ширина которых равна длине одного отрезка разбиения, а высота – значению функции **f(x)** в данном месте графика функции. При этом метод нижних прямоугольников будет приближать значение интеграла снизу:

$I = \sum \Delta F_i,\ \Delta F_i = h \cdot min(f(x_i),\ f(x_i+h)),$ ***где*** $h = x_{i+1} - x_i$

Метод верхних прямоугольников будет приближать значение интеграла сверху:

$I = \sum \Delta F_i,\ \Delta F_i = h \cdot max(f(x_i),\ f(x_i+h)),$ ***где*** $h = x_{i+1} - x_i$

Нужно обратить внимание, что методы нижних и верхних прямоугольников не тождественны методам правых и левых прямоугольников, так как функции на различных участках могут как возрастать, так и убывать. Также нужно принимать во внимание то, что истинное значение интеграла будет лежать строго между результатами, посчитанными методами нижних и верхних прямоугольников, то есть, вычисляя два этих метода одновременно – можно оценить и точность получившегося решения. При этом затраты вычислительных ресурсов не сильно вырастут, если устранить повторные вычисления функции в одной и той же точке.

Метод средних прямоугольников будет давать результаты, средние между описанными выше двумя методами:

$I = \sum \Delta F_i,\ \Delta F_i = h \cdot f(x_i + h/2),$ ***где*** $h = x_{i+1} - x_i$

Метод трапеций

Метод трапеций – чуть точнее метода прямоугольников, он заключается в том, что вычисляется площадь трапеции, а не прямоугольника:

$I = \sum \Delta F_i,\ \Delta F_i = h \cdot (f(x_i) + f(x_i+h))\ /\ 2,$ ***где*** $h = x_{i+1} - x_i$

Нужно обратить внимание, что этот метод не совпадает с методом средних прямоугольников, хотя и похож на него.

Метод парабол (метод Симпсона)

Большой выигрыш в точности вычислений при эквивалентной затрате вычислительных ресурсов дает метод Симпсона, при котором на каждом сегменте разбиения находятся коэффициенты параболы по трем точкам, находящимся на границах сегмента и в его центре, интеграл от квадратичной функции легко вычисляется аналитически, что дает в результате следующую формулу для метода парабол:

$$I = \sum \Delta F_i,\ \Delta F_i = h \cdot (f(x_i) + 4 \cdot f(x_i+h/2) + f(x_i+h)) / 6,\ где\ h = x_{i+1} - x_i$$

Рассмотрим функцию, вычисляющую значение интеграла этим способом:

```
#include <math.h>
// наша интегрируемая функция:
double f(double x)
{
      return cos(x);
}
// первообразная функция:
double Int(double x)
{
      return sin(x);
}
// функция вычисляющая интеграл на интервале [a,b]
// по формуле Симпсона с заданной точностью eps
int N_Iter; // глобальная переменная для количества итераций
double Integral(double a,double b,double eps)
{
      int k=10; // начальное к-во разбиений
      N_Iter=0;
      // значения интегралов на текущей и предыдущей интерациях:
      double val1,val2=0.;
      do
      {
            val1=val2; // предыдущее значение равно текущему
            double s=0; // переменная для суммирования
            double x=a; // начинаем с а
            double h=(b-a)/k; // шаг интегрирования
            for(int i=0;i<k;i++)// повторяем к раз
            {
                  double t=h*(f(x)+4.*f(x+h/2)+f(x+h))/6.;
                  s+=t; // суммируем очередную площадь
                  x+=h; // переходим к следующему интервалу
            }
            val2 = s; // вычисленное новое значение
            k*=2; // удвоение количества разбиений
            N_Iter++; // подсчитываем к-во итераций
      }while (fabs(val1-val2)>eps); // повторяем до достижения точности eps
      return val2; // возвращаем результат интегрирования
}
```

Проинтегрируем ее в интервале от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с точностью eps:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <math.h>
extern int N_Part; // переменная N_Part объявлена в другом файле
double Integral(double a,double b,double eps);
double Int(double x);
// ---------------------------------------------
extern int N_Iter;
int main()
{
      system("chcp 1251 > NUL");
      double eps=1e-6; // точность интегрирования
      double xb=-M_PI_2; // начало интервала
      double xe=M_PI_2; // конец интервала
      double res=Integral(xb,xe,eps); // вычисление нового значения
      printf("Вычисленное значение=%lf\n",res);
      printf("Аналитическое значение=%lf\n",Int(xe)-Int(xb));
      printf("Количество итераций=%d\n",N_Iter);
      getchar();
      return 0;
}
```

Варианты задач для решения.

Вычислить значение определённого интеграла двумя способами. Для вычисления необходимо задать границы интегрирования и точность расчетов в функции *main*(). Их можно либо ввести с клавиатуры, либо передать через параметры командной строки. Функции *f*() (подынтегральная функция), *fint*() (аналитическое вычисление интеграла), *Integral*() (интеграл, посчитанный численно) нужно перенести в отдельный *.cpp файл. А их объявления – в заголовочный файл.

Функции *Integral*() передаётся начало и конец интервала интегрирования и требуемая точность. Она должна возвращать вычисленное значение интеграла и записывать финальное количество разбиений в глобальную переменную.

В функции *main*() нужно найти и вывести

- Значение интеграла, полученное численным методом;
- Аналитическое значение интеграла;
- Достигнутая точность;
- Количество итераций (удвоений разбиения), которые понадобились для достижения требуемой точности.

Вид подынтегральной функции и способы вычисления для каждого варианта приведены в таблице.

Вар.	Подынтегральная функция	Первообразная	Метод 1	Метод 2
1	$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	Верхних прямоугольников	Трапеций
2	$\frac{2}{x}$	$ln(x^2)$	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
3	$2x\cos(2x)+\sin(2x)$	$x\sin(2x)$	Трапеций	Симпсона
4	$ln(\mathrm{x})+1$	$\mathrm{x}*ln(\mathrm{x})$	Трапеций	Верхних прямоугольников
5	$(3+5x)^3$	$\frac{(3+5x)^4}{20}$	Трапеций	Верхних прямоугольников
6	$\frac{2x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}$	$\frac{x^2}{1-x}$	Трапеций	Нижних прямоугольников
7	$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|$	Верхних прямоугольников	Средних прямоугольников
8	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$	Трапеций	Нижних прямоугольников
9	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\arcsin(x)}{2}$	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
10	$\sin(2x)$	$\sin^2(x)$	Трапеций	Симпсона
11	$\mathrm{tg}(\mathrm{x})$	$-\log\left\|\cos(x)\right\|$	Нижних прямоугольников	Симпсона
12	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}(x)$	Трапеций	Нижних прямоугольников

13	$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\log\left\|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\|$	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
14	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\log\left\|x+\sqrt{1+x^2}\right\|$	Средних прямоугольников	Симпсона
15	$\dfrac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^2}$	$\dfrac{\log\left\|x^2+1\right\|}{2}$	Нижних прямоугольников	Трапеций
16	$\dfrac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$	$\dfrac{1}{1+\cos(x)}$	Трапеций	Нижних прямоугольников
17	$x\,\mathrm{e}^{x^2}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}$	Трапеций	Нижних прямоугольников
18	$\mathrm{e}^x(\cos(x)-\sin(x))$	$\mathrm{e}^x\cos(x)$	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
19	$\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{\ln^2(x)}$	$\dfrac{x}{\ln(x)}$	Трапеций	Верхних прямоугольников
20	$x(2\ln(x)+1)$	$x^2\ln(x)$	Трапеций	Средних прямоугольников
21	$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	Трапеций	Нижних прямоугольников
22	$1-\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$	$\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	Трапеций	Симпсона
23	$\dfrac{1}{\mathrm{x}^2}\sin\left(\dfrac{1}{\mathrm{x}}\right)$	$\cos\left(\dfrac{1}{\mathrm{x}}\right)$	Трапеций	Нижних прямоугольников
24	$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\|tg\,\dfrac{x}{2}\right\|$	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
25	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$tg(x)$	Нижних прямоугольников	Симпсона
26	$\dfrac{x}{x^2+1}$	$\dfrac{\ln\left\|x^2+1\right\|}{2}$	Трапеций	Средних прямоугольников
27	$\mathrm{tg}^2(\mathrm{x})$	$\mathrm{tg}(\mathrm{x})$-x	Нижних прямоугольников	Верхних прямоугольников
28	$3x^2-4x$	x^3-2x^2	Верхних прямоугольников	Трапеций

29	$\sqrt{x^2+1}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}-\frac{\ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\|}{2}$	Симпсона	Нижних прямоугольников
30	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\|}{2}$	Трапеций	Средних прямоугольников